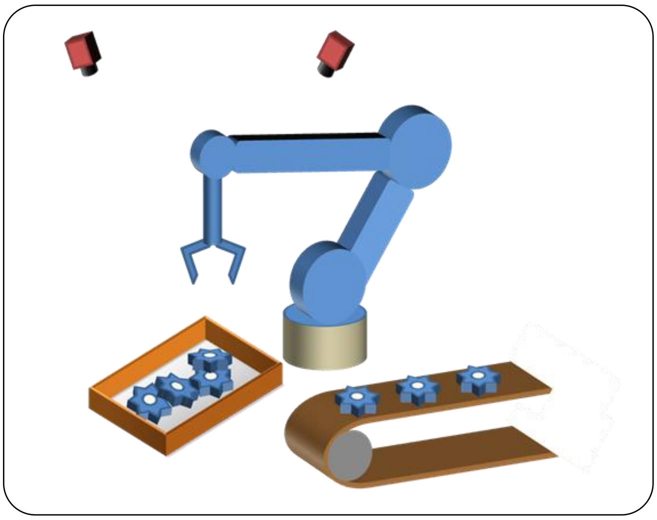
ステレオ方式による3次元計測の理論(第2版)

3次元画像処理とは

1 台のカメラで画像を撮像して 2 次元の画像計測を行うことはごく普通のことですが、2 台以上のカメラを使用して同じ場所を違った角度で撮像することによって撮像対象の 3 次元上の座標位置が 2 枚の画像から求められます。これは人の 2 つの眼が 3 次元空間を認識している方法である「両眼立体視」と基本的に同じもので、人は同じものを 2 つの眼で見ることによって生じる視差で瞬時に 3 次元空間上の位置を判断しています。人の目ではその位置を精度良く計測することは出来ませんが、カメラ間の位置関係が固定された撮像角度が異なる 2 台のカメラで同じ対象画像を捕捉し、コンピュータ処理することによって 3 次元座標を計測することができます。ただし、3 次元座標の計測精度を高めるためには「事前にカメラ間の位置関係を精度良く求めておく」と「カメラで正確に対象画像を捕捉する」ことが大変重要となります。本稿では 3 次元座標の計測はどのような理論に基づいているのか、そして事前にカメラ間の位置関係を高精度で求めるため必須となるキャリブレーション理論について解説します。

実用化への取り組み

現在 3D 映画が話題を集めていますが、3 次元の計測技術においてもその実現はファクトリーオートメーションの分野で大いに期待されています。ロボットハンドに 2 眼のカメラセットを搭載してばら積み部品をロボットでピッキングするピックアンドプレースへの応用、3 次元空間内にある部品の組み立て用途、立体部品の形状計測や欠け・キズの検出等があります。これらのテーマは現状広く普及されていると言える段階ではありませんが、いろいろな企業で実用化への取り組みが盛んに進められています。



理論

3 次元画像処理には、図 0-1 に示したように複数カメラを使ったものや光切断を使ったもの、あるいはそれらを組み合わせたもの等、種々の方法が存在します。ここでは一般的に用いられている 2 カメラを使った 3 次元画像処理の理論を説明します。

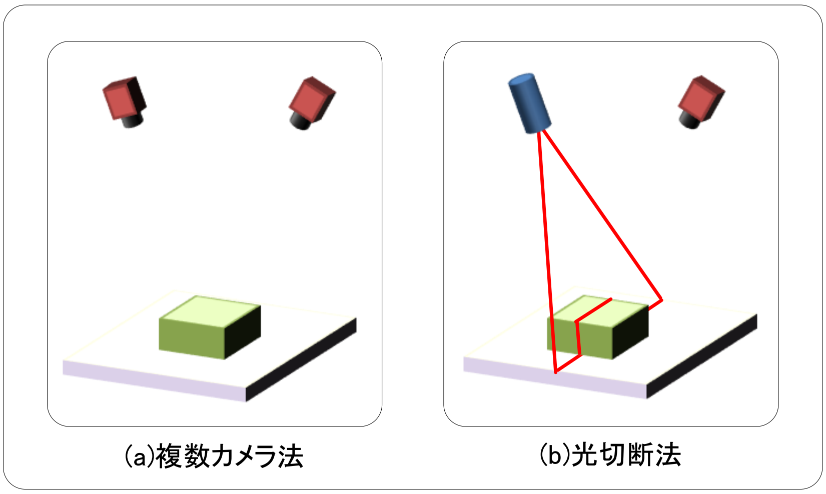


図 0-1　3 次元画像処理

アルゴリズムの説明に先だって、ここで使用する表記法を説明します。

◆　ベクトルの表現法

(x, y, z)座標をベクトル表現するのに以下の 2 つの方法を用いることにします。

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (0-1)$$

$$\tilde{\vec{q}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (0-2)$$

これらはあくまでも表記が異なるだけで同値です。「$\tilde{\vec{q}}$」は「$\vec{q}$ の拡張ベクトル」と言います。なお、2 次元の場合でも同様な表記法になります。

◆　座標系および座標系上のベクトルの表現法

座標系はΣ○で表します。装置の座標系によく使われるワールド座標系ならΣw（w は $world$ の頭文字）となります。Σw 上の座標を表す場合は、左上に座標系の名称を付して ${}^{w}\vec{q}$ のように記述します。さらに、座標に名前を付したいときは ${}^{w}\vec{q}_{\bigcirc}$ といったように右下に記号を付けます。装置座標系

上のマークを表す座標なら ${}^{w}\vec{q}_m$ といった記号で表わす事ができます。

◆ 行列の転置

A^T は行列 A の転置です。

ここから本題に入ります。3 次元画像処理のアルゴリズムはかなり複雑になりますが、その処理の流れをまとめておきますと以下のようになります。

（1）対象物に割り付けた座標系とカメラに割り付けた座標系間の関係の導出

3 次元画像処理は、複数のカメラで撮像した画像を使って対象物の 3 次元情報を抽出する処理です。それらを計算するためには、装置やカメラにそれぞれ座標系を割り付けて座標系の間の関係を導いておく必要があります。装置に割り付けた座標系を Σw 、カメラに割り付けた座標系を Σu とし、Σw 上での 3 次元位置 ${}^{w}\vec{q}$ に対してカメラで投影したものが ${}^{u}\vec{q}$ となった場合、これらの関係は(0-3)式のような射影変換行列 ${}^{u}P_w$ を用いて表すことが出来ます。

$$s \cdot {}^{u}\tilde{\vec{q}} = {}^{u}P_w \cdot {}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (0-3)$$

（2）射影変換行列の導出

全ての i に対する Σw 上の ${}^{w}\vec{q}_i$ が既知のキャリブレーション用基準治具があり、それら対応点が Σu 上の対応点 ${}^{u}\vec{q}_i$ として見出せるならば、(0-3)式における ${}^{u}P_w$ を求めることが出来ます。これは $y = f(x)$ がモデル式として与えられた場合、$(x_i \quad y_i)$ のデータセットが適当な数だけ判るならば最小 2 乗法等により f が見出せるのと同じです（ただ、${}^{w}\vec{q}_i$ と ${}^{u}\vec{q}_i$ の次元が異なるので最小 2 乗法よりは難しくなります)。先ほどの $y = f(x)$ の例における最小 2 乗法に相当するアルゴリズムが 3 次元画像処理でも幾つか存在します。その代表的なものに「Zhang の方法」と呼ばれるものがあります。なお、この項（2）の処理をカメラキャリブレーション（以下、「キャリブレーション」と略記）と言います。

（3）2 つのカメラで得られた座標から 3 次元座標を導出

2 つのカメラのキャリブレーションが終了していれば、

$$s_1 \cdot {}^{u1}\tilde{\vec{q}} = {}^{u1}P_w \, {}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (0-4)$$

$$s_2 \cdot {}^{u2}\tilde{\vec{q}} = {}^{u2}P_w \, {}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (0-5)$$

の 2 式における ${}^{u1}P_w, {}^{u2}P_w$ が既に求まっている事になります。Σw 内における同一の点を投影していることを保証された座標が ${}^{u1}\tilde{\vec{q}}, {}^{u2}\tilde{\vec{q}}$ として得られるならば、(0-4)式および(0-5)式を連立させて 3

次元座標 ${}^{w}\tilde{q}$ を求めることが出来ます（s_1, s_2 に関して言及しませんでしたが、これらは計算過程で消えて無くなります)。

項（1）～項（3）に述べた内容を詳しく説明します。

1. 対象物に割り付けた座標系とカメラに割り付けた座標系間の関係の導出

図 1-1 を用いて説明いたします。

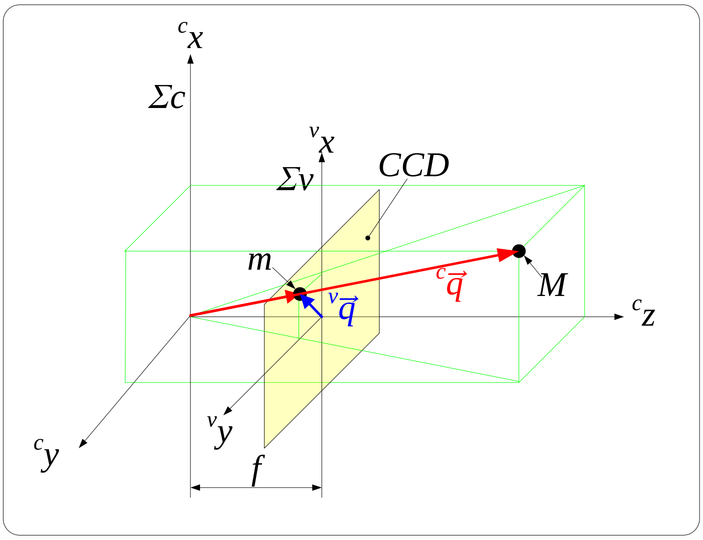


図 1-1　ピンホールカメラモデル(中心射影)

図 1-1 で使っている記号の意味は次の通りです。

Σc ：カメラ座標系・・・座標原点はレンズ中心

Σv ：画像座標系・・・CCD に割り付けた座標系（ただし、原点は左上でなく CCD 中心）

f ：カメラの焦点距離

M ：任意の 3 次元位置

m ：Σc の原点および M を結んだ直線と CCD の交点

${}^{c}\vec{q}$ ：Σc 上の M の位置ベクトル

${}^{v}\vec{q}$ ：Σv 上の m の位置ベクトル

まず、${}^{v}\vec{q} = \left({}^{v}x, {}^{v}y\right)^T, {}^{v}\tilde{q} = \left({}^{v}x, {}^{v}y, 1\right)^T, {}^{c}\vec{q} = \left({}^{c}x, {}^{c}y, {}^{c}z\right)^T, {}^{c}\tilde{q} = \left({}^{c}x, {}^{c}y, {}^{c}z, 1\right)^T$ と定義します。

図 1-1 における簡単な考察から、

$$\frac{{}^{v}x}{f} = \frac{{}^{c}x}{{}^{c}z} \tag{1-1}$$

なので、この式を

$$ {}^{v}x = f\,\frac{{}^{c}x}{{}^{c}z} \qquad (1-2) $$

と変形します。同様に、

$$ \frac{{}^{v}y}{f} = \frac{{}^{c}y}{{}^{c}z} \qquad (1-3) $$

から、

$$ {}^{v}y = f\,\frac{{}^{c}y}{{}^{c}z} \qquad (1-4) $$

となります。(1-2)式および(1-4)式に対してΣcとΣvの関係に注意しながらまとめると、

$$ s\begin{pmatrix} {}^{v}x \\ {}^{v}y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{c}x \\ {}^{c}y \\ {}^{c}z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1-5) $$

となります。ただし、sはスカラーでその正体は${}^{c}z$になります。ここでさらに

$$ {}^{v}P_{c} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1-6) $$

と置くと、

$$ s\cdot{}^{v}\tilde{\vec{q}} = {}^{v}P_{c}\cdot{}^{c}\tilde{\vec{q}} \qquad (1-7) $$

と表すことが出来ます。一方、${}^{w}\tilde{\vec{q}} = \left({}^{w}x, {}^{w}y, {}^{w}z, 1\right)^{T}$とし、$\Sigma w$から$\Sigma c$への相似変換行列${}^{c}T_{w}$を導入して、

それを

$$ {}^{c}T_{w} = \begin{pmatrix} {}^{c}r_{w11} & {}^{c}r_{w12} & {}^{c}r_{w13} & {}^{c}x_{w} \\ {}^{c}r_{w21} & {}^{c}r_{w22} & {}^{c}r_{w23} & {}^{c}y_{w} \\ {}^{c}r_{w31} & {}^{c}r_{w32} & {}^{c}r_{w33} & {}^{c}z_{w} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-8) $$

と定義します。これにより、

$$ {}^{c}\tilde{\vec{q}} = {}^{c}T_{w}\cdot{}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (1-9) $$

と表すことが出来ますので、これを(1-7)式に代入して、

$$ s\cdot{}^{v}\tilde{\vec{q}} = {}^{v}P_{c}\cdot{}^{c}T_{w}\cdot{}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (1-10) $$

を得ることが出来ます。さらに

$$^{v}P_{w} = {}^{v}P_{c} \cdot {}^{c}T_{w} \qquad (1\text{−}11)$$

と置くことにより、

$$s \cdot {}^{v}\tilde{\vec{q}} = {}^{v}P_{w} \cdot {}^{w}\tilde{\vec{q}} \qquad (1\text{−}12)$$

を得ることが出来ます。しかし、以下の 3 つの観点から鑑みると $^{v}\vec{q}$ は直接得られない事が判ります。

① 画像中心(つまり光軸)と CCD 中心は必ずしも一致しない。

② 画像の x, y 軸のスケールが異なる可能性がある。

③ 画像の x, y 軸は必ずしも直交していない可能性がある。

そこで、図 1-2 に示したように上記条件を加味した現実的な座標系 Σ*u* を新たに定義します。つまり、カメラから得られる座標は Σ*v* ではなく Σ*u* 上の座標で得られると考えます。

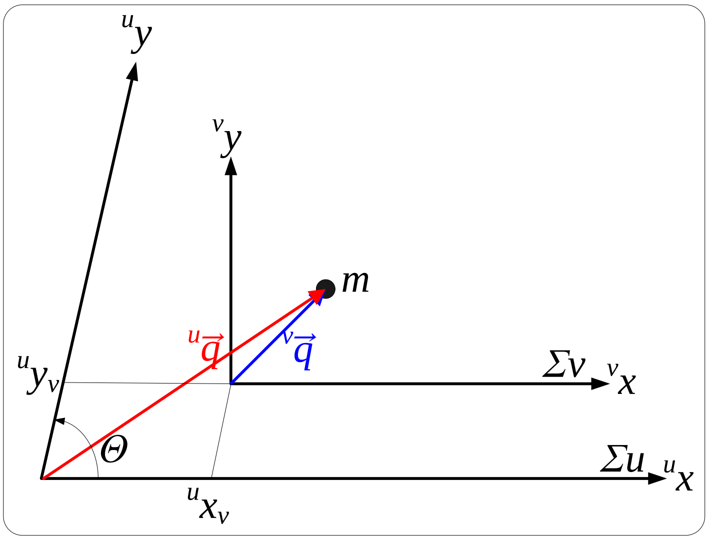


図 1-2　Σ*v* と Σ*u* の関係

図 1-2 で使っている記号の意味は以下の通りです。

Σ*u* ：実際に画像を取り込み、画像処理を行う座標系（ただし、原点は左上でなく CCD 中心）
$^{u}x_{v}, {}^{u}y_{v}$ ：画像の中心(光軸の位置)・・・CCD 中心と光軸の x 軸と y 軸方向のズレ量
Θ ：Σ*u* の x 軸と y 軸のなす角度・・・CCD 配置の斜交角度
$^{v}\vec{q}$ ：Σ*v* 上の m の位置ベクトル
$^{u}\vec{q}$ ：Σ*u* 上の m の位置ベクトル

図 1-2 内の $^{u}\vec{q}$ と $^{v}\vec{q}$ の関係は下式で表すことが出来ます。

$$^{u}\tilde{\vec{q}} = {}^{u}H_{v} \cdot {}^{v}\tilde{\vec{q}} \qquad (1\text{−}13)$$

ここで、

$$
{}^uH_v = \begin{pmatrix} {}^u\lambda_v & -{}^u\lambda_v \cot\Theta & {}^ux_v \\ 0 & \dfrac{{}^u\mu_v}{\sin\Theta} & {}^uy_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-14)
$$

となります(この導出は Appendix 参照)。ただし、${}^u\lambda_v, {}^u\mu_v$ は Σv から Σu へ変換する際の x, y 軸のスケール係数です。(1-12)式と(1-13)式から、

$$
s \cdot {}^u\tilde{q} = {}^uH_v \cdot {}^vP_w \, {}^w\tilde{q} \quad (1-15)
$$

となります。ここで、

$$
{}^uP_w = {}^uH_v \cdot {}^vP_w \quad (1-16)
$$

と置くことにより、

$$
s \cdot {}^u\tilde{q} = {}^uP_w \, {}^w\tilde{q} \quad (1-17)
$$

が得られます。(1-17)式が基本的な射影変換式となり、3 次元位置を算出する際にはこの式を使うことになります。つまり、対象物に割り付けた座標系とカメラに割り付けた座標系間の関係とは*(1-17)*式の事です。これまで説明してきた内容から ${}^uP_w$ を詳細化しましょう。

$$
\begin{aligned}
{}^uP_w &= {}^uH_v \cdot {}^vP_w & (1-18) \\
&= {}^uH_v \cdot {}^vP_c \cdot {}^cT_w & (1-19)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
{}^uP_w = \begin{pmatrix} {}^u\lambda_v & -{}^u\lambda_v \cot\Theta & {}^ux_v \\ 0 & \dfrac{{}^u\mu_v}{\sin\Theta} & {}^uy_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^cr_{w11} & {}^cr_{w12} & {}^cr_{w13} & {}^cx_w \\ {}^cr_{w21} & {}^cr_{w22} & {}^cr_{w23} & {}^cy_w \\ {}^cr_{w31} & {}^cr_{w32} & {}^cr_{w33} & {}^cz_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-20)
$$

$$
= \begin{pmatrix} f \cdot {}^u\lambda_v & -f \cdot {}^u\lambda_v \cot\Theta & {}^ux_v \\ 0 & \dfrac{f \cdot {}^u\mu_v}{\sin\Theta} & {}^uy_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^cr_{w11} & {}^cr_{w12} & {}^cr_{w13} & {}^cx_w \\ {}^cr_{w21} & {}^cr_{w22} & {}^cr_{w23} & {}^cy_w \\ {}^cr_{w31} & {}^cr_{w32} & {}^cr_{w33} & {}^cz_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-21)
$$

と詳細化されます。さらに、

$$ {}^{u}P_{w} = \begin{pmatrix} f\cdot{}^{u}\lambda_{v} & -f\cdot{}^{u}\lambda_{v}\cot\Theta & {}^{u}x_{v} \\ 0 & \dfrac{f\cdot{}^{u}\mu_{v}}{\sin\Theta} & {}^{u}y_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{c}r_{w11} & {}^{c}r_{w12} & {}^{c}r_{w13} & {}^{c}x_{w} \\ {}^{c}r_{w21} & {}^{c}r_{w22} & {}^{c}r_{w23} & {}^{c}y_{w} \\ {}^{c}r_{w31} & {}^{c}r_{w32} & {}^{c}r_{w33} & {}^{c}z_{w} \end{pmatrix} \qquad (1-22) $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^{u}\alpha_{v} & -{}^{u}\alpha_{v}\cot\Theta & {}^{u}x_{v} \\ 0 & \dfrac{{}^{u}\beta_{v}}{\sin\Theta} & {}^{u}y_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{c}r_{w11} & {}^{c}r_{w12} & {}^{c}r_{w13} & {}^{c}x_{w} \\ {}^{c}r_{w21} & {}^{c}r_{w22} & {}^{c}r_{w23} & {}^{c}y_{w} \\ {}^{c}r_{w31} & {}^{c}r_{w32} & {}^{c}r_{w33} & {}^{c}z_{w} \end{pmatrix} \qquad (1-23) $$

となります。以上をまとめて、

$$ {}^{u}P_{w} = {}^{u}A_{v}\cdot\left({}^{c}R_{w} \quad {}^{c}\vec{t}_{w}\right) \qquad (1-24) $$

と表します。ここで、

$$ {}^{u}A_{v} = \begin{pmatrix} {}^{u}\alpha_{v} & -{}^{u}\alpha_{v}\cot\Theta & {}^{u}x_{v} \\ 0 & \dfrac{{}^{u}\beta_{v}}{\sin\Theta} & {}^{u}y_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-25) $$

$$ {}^{c}R_{w} = \begin{pmatrix} {}^{c}r_{w11} & {}^{c}r_{w12} & {}^{c}r_{w13} \\ {}^{c}r_{w21} & {}^{c}r_{w22} & {}^{c}r_{w23} \\ {}^{c}r_{w31} & {}^{c}r_{w32} & {}^{c}r_{w33} \end{pmatrix} \qquad (1-26) $$

$$ {}^{c}\vec{t}_{w} = \begin{pmatrix} {}^{c}x_{w} \\ {}^{c}y_{w} \\ {}^{c}z_{w} \end{pmatrix} \qquad (1-27) $$

$$ {}^{u}\alpha_{v} = f\cdot{}^{u}\lambda_{v} \qquad (1-28) $$

$$ {}^{u}\beta_{v} = f\cdot{}^{u}\mu_{v} \qquad (1-29) $$

です。${}^{u}A_{v}$をカメラの内部パラメータ、$\left({}^{c}R_{w} \quad {}^{c}\vec{t}_{w}\right)$をカメラの外部パラメータと言います。「内部行列、外部行列」や「内部変数、外部変数」という言い方もあります。現在では製造技術の進歩により CCD は正方形で直角に並んでいますので、${}^{u}\kappa_{v}={}^{u}\alpha_{v}={}^{u}\beta_{v}$、$\Theta=\pi/2$と考え、これを(1-23)式に代入した

$$ {}^{u}P_{w} = \begin{pmatrix} {}^{u}\kappa_{v} & 0 & {}^{u}x_{v} \\ 0 & {}^{u}\kappa_{v} & {}^{u}y_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{c}r_{w11} & {}^{c}r_{w12} & {}^{c}r_{w13} & {}^{c}x_{w} \\ {}^{c}r_{w21} & {}^{c}r_{w22} & {}^{c}r_{w23} & {}^{c}y_{w} \\ {}^{c}r_{w31} & {}^{c}r_{w32} & {}^{c}r_{w33} & {}^{c}z_{w} \end{pmatrix} \qquad (1-30) $$

を使うこともあります。ここまで進めてきた説明は、あくまでも座標系の関係に言及しただけです。3 次元処理の目的は「複数のカメラで得られた座標から 3 次元座標を導出」することにありますので、それを実現するためには予め${}^{u}P_{w}$を求めておく必要があります。

2. 射影変換行列の導出

ここでは${}^{u}P_{w}$を求める方法に関して説明します。代表的なキャリブレーション方法として、3 次元パターンを基準治具として用いる Tsai の方法と 2 次元パターンのそれを用いる Zhang の方法があります。かつては Tsai の方法が用いられていましたが、現在は基準治具の取り扱いが容易な Zhang の方法が多く採用されているようです。よって、ここでは Zhang の方法を説明します。Zhang の方法では図 2-1 のような 2 次元パターンで構成されたキャリブレーション用基準治具（以下、「治具」と略記）を使います。

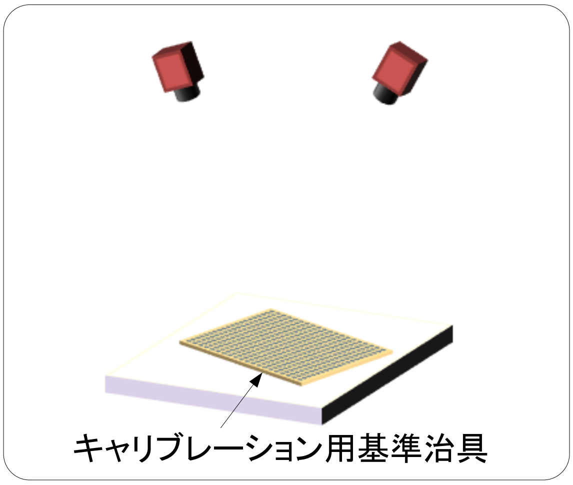


図 2-1　キャリブレーション用基準治具

図 2-2 に示したように治具の位置・姿勢を種々変えながら、それらをカメラで撮像します。Σu はカメラ毎に割り付ける必要がありますので、$\Sigma ui, i = 1 \sim K$ （K はカメラの総数）とすべきですが、カメラが複数あってもキャリブレーションは一つ一つ独立して行えるので、ここでは記号の単純化を図るため Σu としておきます。一方、キャリブレーション時の Σw は治具の位置・姿勢毎に割り付けなければなりませんので、位置・姿勢が k の状況にある座標系を $\Sigma wk, k = 1 \sim N$（N は治具の取りうる位置・姿勢の総数）として説明を進めます。

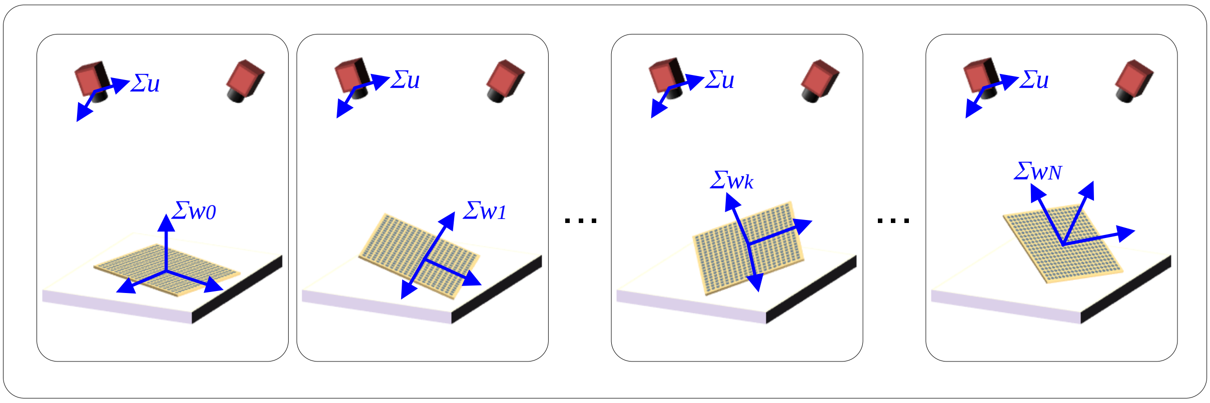


図 2-2　治具の位置・姿勢を種々変えたキャリブレーション

Σw が　Σwk　に置き換わる事に注意しながら(1-17)式および(1-24)式を用いて、

$$s\cdot{}^{u}\tilde{q}={}^{u}A_{v}\cdot\begin{pmatrix}{}^{c}R_{wk} & {}^{c}\vec{t}_{wk}\end{pmatrix}{}^{wk}\tilde{q}$$
$$={}^{u}A_{v}\cdot\begin{pmatrix}{}^{c}R_{wk}^{(1)} & {}^{c}R_{wk}^{(2)} & {}^{c}R_{wk}^{(3)} & {}^{c}\vec{t}_{wk}\end{pmatrix}{}^{wk}\tilde{q} \qquad (2-1)$$

を導きます。ただし、${}^{c}R_{wk}^{(j)}$は${}^{c}R_{wk}$の第 j 列です。記号の煩雑化を避けるため、以下のように置き直します。

$$s^{(k)}\cdot{}^{u}\tilde{q}=A\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_1^{(k)} & \vec{r}_2^{(k)} & \vec{r}_3^{(k)} & \vec{t}^{(k)}\end{pmatrix}{}^{wk}\tilde{q} \qquad (2-2)$$

ここで、$A={}^{u}A_{v}, \vec{r}_1^{(k)}={}^{c}R_{wk}^{(1)}, \vec{r}_2^{(k)}={}^{c}R_{wk}^{(2)}, \vec{r}_3^{(k)}={}^{c}R_{wk}^{(3)}, \vec{t}^{(k)}={}^{c}\vec{t}_{wk}$ です。なお、s はΣwkに依存するため$s^{(k)}$としています。 (2-2)式は、

$$s^{(k)}\cdot\begin{pmatrix}{}^{u}x\\{}^{u}y\\1\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_1^{(k)} & \vec{r}_2^{(k)} & \vec{r}_3^{(k)} & \vec{t}^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\{}^{wk}y\\{}^{wk}z\\1\end{pmatrix} \qquad (2-3)$$

と展開されます。治具は 2 次元パターンなので${}^{wk}z=0$となり、

$$s^{(k)}\cdot\begin{pmatrix}{}^{u}x\\{}^{u}y\\1\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_1^{(k)} & \vec{r}_2^{(k)} & \vec{r}_3^{(k)} & \vec{t}^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\{}^{wk}y\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=A\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_1^{(k)} & \vec{r}_2^{(k)} & \vec{t}^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\{}^{wk}y\\1\end{pmatrix} \qquad (2-4)$$

となります。これにより$\begin{pmatrix}{}^{u}x & {}^{u}y\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}{}^{wk}x & {}^{wk}y\end{pmatrix}$は、

$$H^{(k)}=A\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_1^{(k)} & \vec{r}_2^{(k)} & \vec{t}^{(k)}\end{pmatrix} \qquad (2-5)$$

となる行列（これをホモグラフィと言います）によって関係付けられることになり、

$$s^{(k)}\cdot\begin{pmatrix}{}^{u}x\\{}^{u}y\\1\end{pmatrix}=H^{(k)}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\{}^{wk}y\\1\end{pmatrix} \qquad (2-6)$$

と表すことが出来て、同じ次元の変換となります（ここでの$H^{(k)}$は前述の${}^{u}H_{v}$とは無関係）。$H^{(k)}$は 3×3 の行列で要素数は 9 となりますが、自由度は８（$H^{(k)}$内の要素の中で非ゼロの要素を選び、それで全要素を割れば未知数は 8 つ）なので、対応点が最低 4 点（1 点あたり x と y の 2 つがあるので 2×4=8）あれば確定するものです。それでは具体的に$H^{(k)}$を求めてみます。

$$H^{(k)}=\begin{pmatrix}\vec{h}_1^{(k)} & \vec{h}_2^{(k)} & \vec{h}_3^{(k)}\end{pmatrix} \qquad (2-7)$$

と置くことで

$$s^{(k)}\cdot\begin{pmatrix}{}^u x\\ {}^u y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{h}_1^{(k)} & \vec{h}_2^{(k)} & \vec{h}_3^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\ {}^{wk}y\\ 1\end{pmatrix} \tag{2-8}$$

$$=\begin{pmatrix}h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} & h_{13}^{(k)}\\ h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} & h_{23}^{(k)}\\ h_{31}^{(k)} & h_{32}^{(k)} & h_{33}^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\ {}^{wk}y\\ 1\end{pmatrix} \tag{2-8'}$$

$$=\begin{pmatrix}\vec{\eta}_1^{(k)}\\ \vec{\eta}_2^{(k)}\\ \vec{\eta}_3^{(k)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}{}^{wk}x\\ {}^{wk}y\\ 1\end{pmatrix} \tag{2-8''}$$

と定義します。ただし、$\vec{\eta}_i^{(k)}=\begin{pmatrix}h_{i1}^{(k)} & h_{i2}^{(k)} & h_{i3}^{(k)}\end{pmatrix}$となる行ベクトルとします（$i=1\sim 3$）。また、$\left({}^u x,{}^u y\right)$は$\left({}^{wk}x,{}^{wk}y\right)$の対応点でなくてはなりません。$\vec{\eta}_1^{(k)},\vec{\eta}_2^{(k)},\vec{\eta}_3^{(k)}$が導出出来れば、$\vec{h}_1^{(k)},\vec{h}_2^{(k)},\vec{h}_3^{(k)}$は間接的に求まります。

ここで、(2-8’’)式から$s^{(k)}$を消去し、さらに既知・未知の情報を分離して整理すると、

$$\begin{pmatrix}{}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{\,T} & \vec{0}_3^T & -{}^u x\cdot{}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{\,T}\\ \vec{0}_3^T & {}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{\,T} & -{}^u y\cdot{}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{\,T}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left(\vec{\eta}_1^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_2^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_3^{(k)}\right)^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2-9}$$

となります。ここで、$\vec{0}_3^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, {}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h=\begin{pmatrix}{}^{wk}x & {}^{wk}y & 1\end{pmatrix}^T$です。$i$番目の座標から生成された${}^{w}\tilde{\vec{q}}_h$を新たに${}^{wi}\tilde{\vec{q}}_h^{(i)}$と置くと、(2-9)式は

$$\begin{pmatrix}\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(i)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(i)}\right)^T\\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(i)}\right)^T & -{}^u y\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(i)}\right)^T\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left(\vec{\eta}_1^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_2^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_3^{(k)}\right)^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2-10}$$

と表されます。治具上のパターンからM個の座標が得られるのならば、(2-10)式を積み重ねることで、

$$\begin{pmatrix}\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T\\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T & -{}^u y\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T\\ \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T\\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T & -{}^u y\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T\\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T\\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T & -{}^u y\cdot\left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left(\vec{\eta}_1^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_2^{(k)}\right)^T\\ \left(\vec{\eta}_3^{(k)}\right)^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2-11}$$

が得られます。ここで、

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T \\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T & -{}^u y \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(1)}\right)^T \\ \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T \\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T & -{}^u y \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(2)}\right)^T \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T & \vec{0}_3^T & -{}^u x \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T \\ \vec{0}_3^T & \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T & -{}^u y \cdot \left({}^{wk}\tilde{\vec{q}}_h^{(M)}\right)^T \end{pmatrix} \qquad (2-12)$$

と置くと、$\left(\vec{\eta}_1^{(k)} \quad \vec{\eta}_2^{(k)} \quad \vec{\eta}_3^{(k)}\right)^T$ は $V^{(k)^T} V^{(k)}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして求めることが出来るので、これにより $\vec{h}_1^{(k)}, \vec{h}_2^{(k)}, \vec{h}_3^{(k)}$ も求まります。

一方、(2-5)式および(2-7)式から

$$\left(\vec{h}_1^{(k)} \quad \vec{h}_2^{(k)} \quad \vec{h}_3^{(k)}\right) = \lambda^{(k)} A \cdot \left(\vec{r}_1^{(k)} \quad \vec{r}_2^{(k)} \quad \vec{t}^{(k)}\right) \qquad (2-13)$$

が導かれます。ここで、$\lambda^{(k)}$ は $\left(\vec{h}_1^{(k)} \quad \vec{h}_2^{(k)} \quad \vec{h}_3^{(k)}\right)$ を求める際の定数倍の不定性を吸収する係数です。

$\vec{r}_1^{(k)}, \vec{r}_2^{(k)}$ は直交する単位ベクトルなので、

$$\vec{r}_1^{(k)^T} \vec{r}_2^{(k)} = 0 \qquad (2-14)$$

より、

$$\vec{h}_1^{(k)^T} A^{-T} A^{-1} \vec{h}_2^{(k)} = 0 \qquad (2-15)$$

が得られます。さらに、

$$\left\|\vec{r}_1^{(k)}\right\|^2 = \left\|\vec{r}_2^{(k)}\right\|^2 \qquad (2-16)$$

より、

$$\vec{h}_1^{(k)^T} A^{-T} A^{-1} \vec{h}_1^{(k)} = \vec{h}_2^{(k)^T} A^{-T} A^{-1} \vec{h}_2^{(k)} \qquad (2-17)$$

が得られます。ただし、A^{-T} は $\left(A^{-1}\right)^T$ もしくは $\left(A^T\right)^{-1}$ を略記したものです。1 つの治具の位置・姿勢から(2-15)式および(2-17)式の 2 つの拘束式が得られますので、A の未知数（内部パラメータ）の個数が 5 つであるから少なくとも 3 つの治具の異なる位置・姿勢を撮像した画像が必要となります。

さらに話を進めましょう。(2-15)式および(2-17)式に出てくる $A^{-T} A^{-1}$ は対称性を有するので、

$$\begin{aligned} B &= A^{-T} A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (2-18)$$

と表し、さらに B の要素を並べたベクトルを

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}^T \quad (2-19)$$

とします。ホモグラフィ $H^{(k)}$ の i 番目の列ベクトルを $\vec{h}_i^{(k)} = \begin{pmatrix} h_{i1}^{(k)} & h_{i2}^{(k)} & h_{i3}^{(k)} \end{pmatrix}^T, i = 1,2,3$

とすると、$\vec{h}_i^{(k)T} B \vec{h}_j^{(k)}$ は

$$\vec{h}_i^{(k)T} B \vec{h}_j^{(k)} = \vec{v}_{ij}^{(k)T} \vec{b} \quad (2-20)$$

となります。ただし、

$$\vec{v}_{ij}^{(k)} = \begin{pmatrix} h_{i1}^{(k)} h_{j1}^{(k)} & h_{i1}^{(k)} h_{j2}^{(k)} + h_{i2}^{(k)} h_{j1}^{(k)} & h_{i2}^{(k)} h_{j2}^{(k)} & h_{i3}^{(k)} h_{j1}^{(k)} + h_{i1}^{(k)} h_{j3}^{(k)} & h_{i3}^{(k)} h_{j2}^{(k)} + h_{i2}^{(k)} h_{j3}^{(k)} & h_{i3}^{(k)} h_{j3}^{(k)} \end{pmatrix}^T$$
$$(2-21)$$

です。(2-15)式および(2-17)式をまとめると、

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_{12}^{(k)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(k)} - \vec{v}_{22}^{(k)} \right)^T \end{pmatrix} \vec{b} = 0 \quad (2-22)$$

となります。もし、N 枚の画像が得られていれば、(2-22)式を積み重ねることで、

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_{12}^{(1)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(1)} - \vec{v}_{22}^{(1)} \right)^T \\ \vec{v}_{12}^{(2)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(2)} - \vec{v}_{22}^{(2)} \right)^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{v}_{12}^{(N)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(N)} - \vec{v}_{22}^{(N)} \right)^T \end{pmatrix} \vec{b} = 0 \quad (2-23)$$

が得られます。ここで、

$$V_b = \begin{pmatrix} \vec{v}_{12}^{(1)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(1)} - \vec{v}_{22}^{(1)} \right)^T \\ \vec{v}_{12}^{(2)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(2)} - \vec{v}_{22}^{(2)} \right)^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{v}_{12}^{(N)T} \\ \left(\vec{v}_{11}^{(N)} - \vec{v}_{22}^{(N)} \right)^T \end{pmatrix} \quad (2-24)$$

とすると、$\vec{b}$ は $V_b^T V_b$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして求めることが出来ます。$\vec{b}$ が求まれば必然的に B も求まりますので、

$$B = \lambda_b A^{-T} A^{-1} \quad (2-25)$$

の関係を用い、右辺を展開して辺々を比較することにより A が確定出来ます。λ_b は $\vec{b}$ を求める際の定数倍の不定性を吸収する係数ですが、これも同時に求められます。最終的に、(2-13)式を使うことで以下のように治具の位置・姿勢毎の外部パラメータが求められます。

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_h} A^{-1} \vec{h}_1^{(k)} \\
\vec{r}_2^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_h} A^{-1} \vec{h}_2^{(k)} \\
\vec{r}_3^{(k)} &= \vec{r}_1^{(k)} \times \vec{r}_2^{(k)} \\
\vec{t}^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_h} A^{-1} \vec{h}_3^{(k)}
\end{aligned}
\qquad (2-26)
$$

なお、$\left\|\vec{r}_1^{(k)}\right\| = \left\|\vec{r}_2^{(k)}\right\| = 1$ を考慮に入れると λ_h は $\lambda_h = \left\|A^{-1}\vec{h}_1^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}\vec{h}_2^{(k)}\right\|$ となります。

なお、ここまでの処理は Σwk を使っていましたので、Σw が定義されていません。ここでは話を簡単にするため、$\Sigma w0$ をそのまま Σw とすることにします。この場合、少なくとも $\Sigma w0$ は動かすことなく（$\Sigma wk, k \neq 0$ はその限りではありません)、全てのカメラで予め撮像を行っておく必要が出てくることにご留意下さい。

以上がキャリブレーションのアルゴリズムですが、ここで述べた内容はあくまでも基本です。3 次元処理におけるキャリブレーションがどの様に形成されているものなのかをざっくりと理解するのにお役立て下さい。実際のアルゴリズムでは、カメラから取得する座標に対してレンズ歪みを考慮する事や、内部パラメータや外部パラメータに対して前述の値を初期値とした反復法による高精度化（Σw 生成も含む）が必要になってきます。当社ではこれらを含めて 3 次元処理を実現していますが、そのアルゴリズムはいささか複雑になってくるため説明の範囲を超えますのでここでは省略させていただきます。

3．2 つのカメラで得られた座標から 3 次元座標を導出

既にキャリブレーションを終えた２つのカメラがあれば、同一の 3 次元点を投影した対応点を計測することにより、3 次元点を復元することが出来ます。対象物が Σw、カメラ 1 のカメラ座標系が $\Sigma c1$、画像座標系が $\Sigma u1$、カメラ 2 のカメラ座標系が $\Sigma c2$、画像座標系が $\Sigma u2$ として割り付けられているものとします。Σw 上における 3 次元点 ${}^{w}\vec{q}$ に対して、カメラ 1 で投影した座標を ${}^{u1}\vec{q}$、カメラ 2 で投影した座標 ${}^{u2}\vec{q}$ とします。

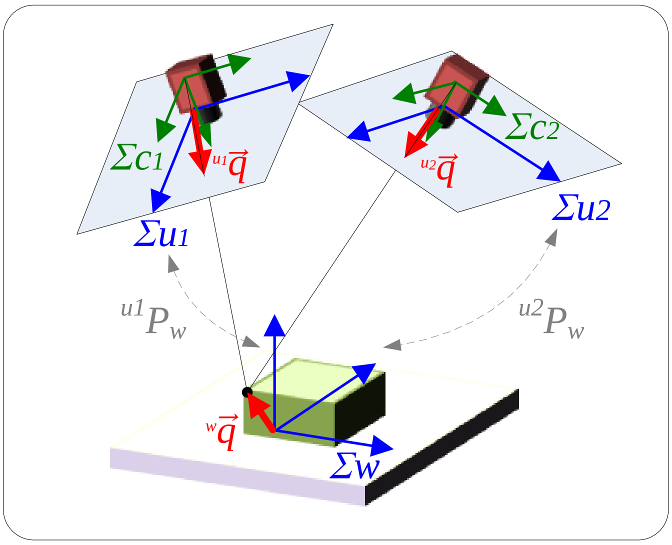


図 3-1　2 つのカメラで得られた座標から 3 次元座標を導出

この時、*(1-17)*式から ${}^{w}\vec{q}, {}^{u1}\vec{q}, {}^{u2}\vec{q}$ は以下の関係を満足します。

$$s_1 \cdot {}^{u1}\tilde{\vec{q}} = {}^{u1}P_w {}^{w}\tilde{\vec{q}} \tag{3-1}$$

$$s_2 \cdot {}^{u2}\tilde{\vec{q}} = {}^{u2}P_w {}^{w}\tilde{\vec{q}} \tag{3-2}$$

${}^{u1}P_w, {}^{u2}P_w$ は項 2 で求めた射影変換行列です。${}^{u1}\vec{q}, {}^{u2}\vec{q}$ を入力することにより、${}^{w}\vec{q}$ を出力しなくてはなりません。(3-1)式を具体的に展開すると

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} {}^{u1}x \\ {}^{u1}y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{u1}P_{w11} & {}^{u1}P_{w12} & {}^{u1}P_{w13} & {}^{u1}P_{w14} \\ {}^{u1}P_{w21} & {}^{u1}P_{w22} & {}^{u1}P_{w23} & {}^{u1}P_{w24} \\ {}^{u1}P_{w31} & {}^{u1}P_{w32} & {}^{u1}P_{w33} & {}^{u1}P_{w34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{w}x \\ {}^{w}y \\ {}^{w}z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

となります。s_1 は

$$s_1 = \begin{pmatrix} {}^{u1}P_{w31} & {}^{u1}P_{w32} & {}^{u1}P_{w33} & {}^{u1}P_{w34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{w}x \\ {}^{w}y \\ {}^{w}z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

と表されるので、この s_1 を消去しながら未知情報と既知情報をまとめて整理すると

$$\begin{pmatrix} {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w11} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w12} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w13} \\ {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w21} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w22} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{w}x \\ {}^{w}y \\ {}^{w}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{u1}P_{w14} - {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w34} \\ {}^{u1}P_{w24} - {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w34} \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

となります。$\begin{pmatrix} {}^{w}x & {}^{w}y & {}^{w}z \end{pmatrix}^T$ が未知情報でそれ以外は既知情報です。同様に、(3-2)式からは

$$\begin{pmatrix} {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w11} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w12} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w13} \\ {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w21} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w22} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{w}x \\ {}^{w}y \\ {}^{w}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{u2}P_{w14} - {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w34} \\ {}^{u2}P_{w24} - {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w34} \end{pmatrix} \tag{3-6}$$

が導かれます。(3-5)式と(3-6)式をまとめると

$$B\,{}^{w}\vec{q} = \vec{b} \tag{3-7}$$

となります。ここで、

$$B = \begin{pmatrix} {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w11} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w12} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w13} \\ {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w21} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w22} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w23} \\ {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w11} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w12} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w13} \\ {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w21} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w22} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w23} \end{pmatrix} \tag{3-8}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} {}^{u1}P_{w14} - {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w34} \\ {}^{u1}P_{w24} - {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w34} \\ {}^{u2}P_{w14} - {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w34} \\ {}^{u2}P_{w24} - {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w34} \end{pmatrix} \tag{3-9}$$

です。従って、一般化逆行列を使うことにより

$${}^{w}\vec{q} = \left(B^{T}B\right)^{-1} B^{T}\vec{b} \tag{3-10}$$

として ${}^{w}\vec{q}$ を求めることが出来るわけです。より一般化して、カメラが K 個の場合、

$$B = \begin{pmatrix} {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w11} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w12} & {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w13} \\ {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w31} - {}^{u1}P_{w21} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w32} - {}^{u1}P_{w22} & {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w33} - {}^{u1}P_{w23} \\ {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w11} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w12} & {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w13} \\ {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w31} - {}^{u2}P_{w21} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w32} - {}^{u2}P_{w22} & {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w33} - {}^{u2}P_{w23} \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ {}^{uK}x \cdot {}^{uK}P_{w31} - {}^{uK}P_{w11} & {}^{uK}x \cdot {}^{uK}P_{w32} - {}^{uK}P_{w12} & {}^{uK}x \cdot {}^{uK}P_{w33} - {}^{uK}P_{w13} \\ {}^{uK}y \cdot {}^{uK}P_{w31} - {}^{uK}P_{w21} & {}^{uK}y \cdot {}^{uK}P_{w32} - {}^{uK}P_{w22} & {}^{uK}y \cdot {}^{uK}P_{w33} - {}^{uK}P_{w23} \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} {}^{u1}P_{w14} - {}^{u1}x \cdot {}^{u1}P_{w34} \\ {}^{u1}P_{w24} - {}^{u1}y \cdot {}^{u1}P_{w34} \\ {}^{u2}P_{w14} - {}^{u2}x \cdot {}^{u2}P_{w34} \\ {}^{u2}P_{w24} - {}^{u2}y \cdot {}^{u2}P_{w34} \\ \vdots \\ \vdots \\ {}^{uK}P_{w14} - {}^{uK}x \cdot {}^{uK}P_{w34} \\ {}^{uK}P_{w24} - {}^{uK}y \cdot {}^{uK}P_{w34} \end{pmatrix} \qquad (3-12)$$

とする事により 3 次元位置を求める事が出来ます。

以　上

Appendix : ${}^{u}H_{v}$ の導出

図 A-1 を用いて ${}^{u}H_{v}$ の導出を行います。

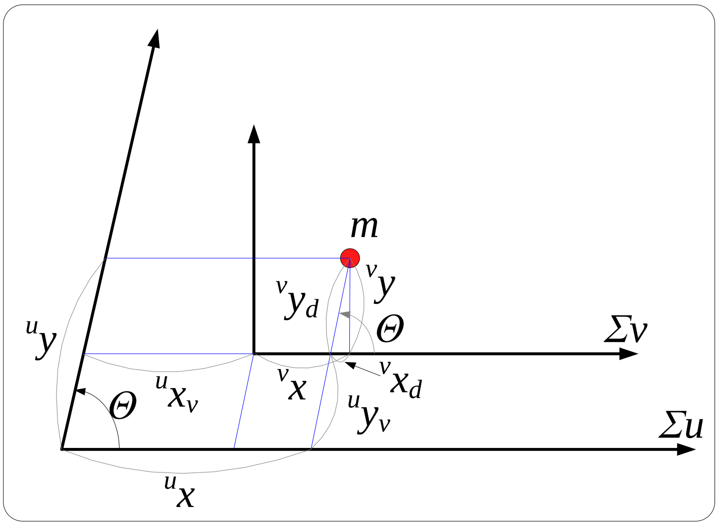


図 A-1 ${}^{u}H_{v}$ の導出

まず、x 軸方向に対して(a-1)式が成り立ちます。ただし、Σv から Σu への x 軸に関するスケール係数を ${}^{u}\lambda_{v}$ とします。

$$ {}^{u}x = {}^{u}x_{v} + {}^{u}\lambda_{v} \cdot \left({}^{v}x - {}^{v}x_{d} \right) \qquad (a-1) $$

ここで、

$$ \tan\Theta = \frac{{}^{v}y}{{}^{v}x_{d}} \qquad (a-2) $$

ゆえ、

$$ {}^{v}x_{d} = \frac{{}^{v}y}{\tan\Theta} \qquad (a-3) $$

$$ = {}^{v}y \cdot \cot\Theta \qquad (a-4) $$

となるので、(a-4)式を(a-1)式に代入して、

$$ {}^{u}x = {}^{u}x_{v} + {}^{u}\lambda_{v} \cdot \left({}^{v}x - {}^{v}y \cdot \cot\Theta \right) \qquad (a-5) $$

を得ることが出来ます。これを整理すると、

$$ {}^{u}x = \begin{pmatrix} {}^{u}\lambda_{v} & -{}^{u}\lambda_{v} \cdot \cot\Theta & {}^{u}x_{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{v}x \\ {}^{v}y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (a-6) $$

となります。

一方、y 軸方向に対して(a-7)式が成り立ちます。ただし、Σv から Σu への y 軸に関するスケール係数を ${}^{u}\mu_{v}$ とします。

$$ {}^{u}y = {}^{u}y_{v} + {}^{u}\mu_{v} \cdot {}^{v}y_{d} \qquad (a-7) $$

ここで、

$$ \sin\Theta = \frac{{}^{v}y}{{}^{v}y_{d}} \qquad (a-8) $$

ですから、

$$ {}^{v}y_{d} = \frac{{}^{v}y}{\sin\Theta} \qquad (a-9) $$

となるので、(a-9)式を(a-7)式に代入して、

$$ {}^{u}y = {}^{u}y_{v} + {}^{u}\mu_{v} \cdot \frac{{}^{v}y}{\sin\Theta} \qquad (a-10) $$

を得ることが出来ます。これを整理すると、

$$ {}^{u}y = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{{}^{u}\mu_{v}}{\sin\Theta} & {}^{u}y_{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{v}x \\ {}^{v}y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (a-11) $$

となります。(a-6)式と(a-11)式をまとめて整理すると、

$$ \begin{pmatrix} {}^{u}x \\ {}^{u}x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{u}\lambda_{v} & -{}^{u}\lambda_{v} \cdot \cot\Theta & {}^{u}x_{v} \\ 0 & \dfrac{{}^{u}\mu_{v}}{\sin\Theta} & {}^{u}y_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{v}x \\ {}^{v}y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (a-12) $$

が得られます。(a-12)式は(a-13)式のように表せます。

$$ {}^{u}\tilde{q} = {}^{u}H_{v}\,{}^{v}\tilde{q} \qquad (a-13) $$

よって、${}^{u}H_{v}$ の導出が出来ます。

以上