同次座標表現を使った座標変換に関して

ロボットや画像処理におけるアルゴリズム開発を進めていく際、ある座標系上の座標を他の座標系上の座標に変換したいということは良くある状況だと思います。実際のケースでは座標系が5つも6つも出てくることもあり、混乱することも多くなります。ここでは座標変換に関して同次座標表現を用いることで、これらを簡単に構築できる方法を説明いたします。図１は最も簡単なケースである2つの座標系の間での変換を表したものです。

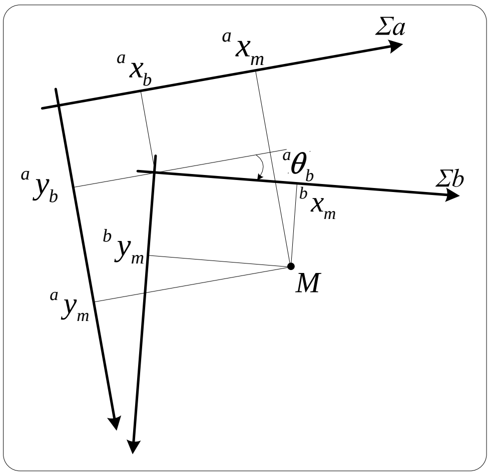

図１

図１における記号の説明

Σa ：変換先の座標系 a
Σb ：変換元の座標系 b
${}^a x_b, {}^a y_b$ ： Σa から見た Σb の原点の x 座標, y 座標
${}^a \theta_b$ ： Σa の x 軸から Σb の x 軸への傾き角
M ：マーク（対象物位置）
${}^a x_m, {}^a y_m$ ： Σa 上の M の x 座標, y 座標
${}^b x_m, {}^b y_m$ ： Σb 上の M の x 座標, y 座標

Σb 上のマーク M の座標を $\begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \end{pmatrix}$ と表し、それを Σa 上へ変換した結果、変換後の M の座標が $\begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \end{pmatrix}$ となった場合に、高校の行列の講義で習う座標変換では式 (1) のように表されていると思います（とはいえ、使われている変数名はここで使っているものより簡単なものでしょう）。

$$\begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^a\theta_b & -\sin {}^a\theta_b \\ \sin {}^a\theta_b & \cos {}^a\theta_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^a x_b \\ {}^a y_b \end{pmatrix} \tag{1}$$

この表現では平行移動と回転移動を別に扱っているため、それらをいちいち分けて考えなければなりません。座標系が2つや3つ程度ならそれでも問題はないのですが、ロボットの軌道計画のように座標系の数が多くなると、式 (1) のよ

うな表現では煩雑になり、それゆえ計算ミスも多くなります。これを解決すべく使われているのが同次座標表現です。式(1)と同値（本質的に同じもの）なのですが、表し方が異なり、式(2)のようになります。

$$\begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^a\theta_b & -\sin {}^a\theta_b & {}^a x_b \\ \sin {}^a\theta_b & \cos {}^a\theta_b & {}^a y_b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

この表現の場合、平行移動と回転移動が1つの行列の中に入っているため、それらを区別することなく取り扱えますので非常に便利になります。この右辺の行列を座標変換行列と称し、${}^aT_b$ で表します。つまり、座標変換行列 ${}^aT_b$ は

$$ {}^aT_b = \begin{pmatrix} \cos {}^a\theta_b & -\sin {}^a\theta_b & {}^a x_b \\ \sin {}^a\theta_b & \cos {}^a\theta_b & {}^a y_b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となります。ここで、${}^a\vec{q}_m = \begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \\ 1 \end{pmatrix}, {}^b\vec{q}_m = \begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \\ 1 \end{pmatrix}$と定義すると、

$$ {}^a\vec{q}_m = {}^aT_b\, {}^b\vec{q}_m \tag{4}$$

と表せるので、記号はやや複雑となりますが、実は大変使いやすくなります。右辺のTの下付添字と$\vec{q}$の上付添字は座標系の名称となり、一般的に一致します（式(4)の場合はbです）ので間違いも発見しやすくなります。なお、この${}^aT_b$内に出てくる${}^a x_b, {}^a y_b, {}^a\theta_b$を$\Sigma b$から$\Sigma a$への座標変換パラメータと言います。「座標のキャリブレーションを行う」というのは、$\begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \end{pmatrix}$の情報から${}^a x_b, {}^a y_b, {}^a\theta_b$を求めることに他なりません。

Σb上のMの座標をΣa上へ変換する場合に式(2)や式(4)で表されるのは言及しましたが、逆にΣa上での座標が先に判っていて、それをΣb上の座標に変換する場合は、式(5)や式(6)のように表現できます。

$$\begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^a\theta_b & -\sin {}^a\theta_b & {}^a x_b \\ \sin {}^a\theta_b & \cos {}^a\theta_b & {}^a y_b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$ {}^b\vec{q}_m = {}^aT_b^{-1}\, {}^a\vec{q}_m \tag{6}$$

このとき、図2に示したように座標変換パラメータが${}^a x_b, {}^a y_b, {}^a\theta_b$ではなく${}^b x_a, {}^b y_a, {}^b\theta_a$が既知の場合は以下のように表現されます。

$$\begin{pmatrix} {}^b x_m \\ {}^b y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^b\theta_a & -\sin {}^b\theta_a & {}^b x_a \\ \sin {}^b\theta_a & \cos {}^b\theta_a & {}^b y_a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^a x_m \\ {}^a y_m \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$ {}^{b}\vec{q}_{m} = {}^{b}T_{a}\,{}^{a}\vec{q}_{m} \tag{8} $$

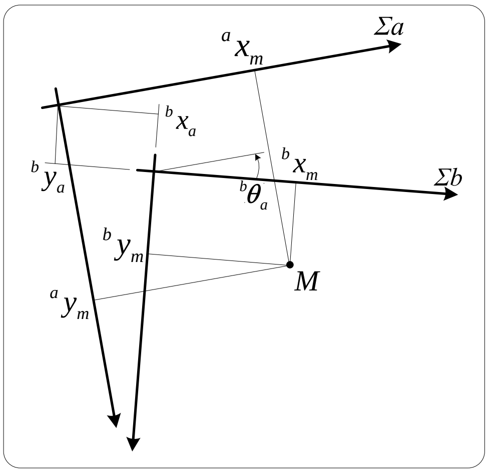

図2

図２における記号の説明

Σa ：変換先の座標系 a
Σb ：変換元の座標系 b
${}^{b}x_{a}, {}^{b}y_{a}$ ： Σb から見た Σa の原点の x 座標, y 座標
${}^{b}\theta_{a}$ ： Σb の x 軸から Σa の x 軸への傾き角
M ：マーク（対象物位置）
${}^{a}x_{m}, {}^{a}y_{m}$ ： Σa 上の M の x 座標, y 座標
${}^{b}x_{m}, {}^{b}y_{m}$ ： Σb 上の M の x 座標, y 座標

つまり、${}^{a}T_{b}^{-1} = {}^{b}T_{a}$ と定義してその性質を大いに利用して表現します。ここまでの内容だけでは同次座標表現のありがたみは分かり辛いかと思いますが、組み合わせることでより複雑な表現が可能となります。例えば、図3に示したように新たに座標系 Σc を追加導入しなくてはならなくなったとき、$\Sigma a, \Sigma b, \Sigma c$ を組み合わせて複合座標変換をすることが可能となります。

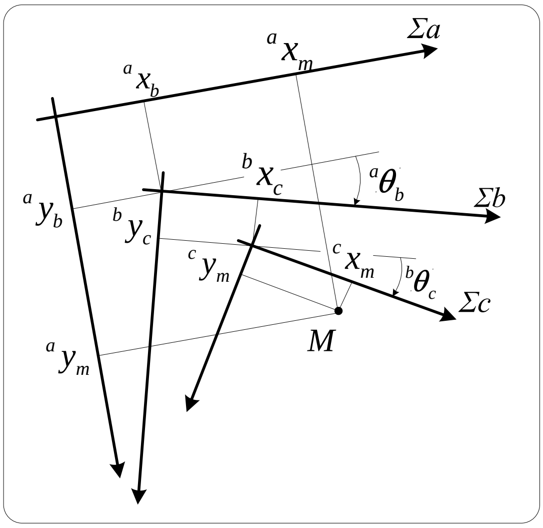

図３

図３における記号の説明

Σa	：変換先の座標系 a
Σb	：変換途中の座標系 b
Σc	：変換元の座標系 c
${}^{a}x_{b}, {}^{a}y_{b}$	： Σa から見た Σb の原点の x 座標, y 座標
${}^{a}\theta_{b}$	： Σa の x 軸から Σb の x 軸への傾き角
${}^{b}x_{c}, {}^{b}y_{c}$	： Σb から見た Σc の原点の x 座標, y 座標
${}^{b}\theta_{c}$	： Σb の x 軸から Σc の x 軸への傾き角
M	：マーク（対象物位置）
${}^{a}x_{m}, {}^{a}y_{m}$	： Σa 上の M の x 座標, y 座標
${}^{c}x_{m}, {}^{c}y_{m}$	： Σc 上の M の x 座標, y 座標

Σc から Σa への変換は

$$\begin{pmatrix} {}^{a}x_{m} \\ {}^{a}y_{m} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^{a}\theta_{b} & -\sin {}^{a}\theta_{b} & {}^{a}x_{b} \\ \sin {}^{a}\theta_{b} & \cos {}^{a}\theta_{b} & {}^{a}y_{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos {}^{b}\theta_{c} & -\sin {}^{b}\theta_{c} & {}^{b}x_{c} \\ \sin {}^{b}\theta_{c} & \cos {}^{b}\theta_{c} & {}^{b}y_{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{c}x_{m} \\ {}^{c}y_{m} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$${}^{a}\vec{q}_{m} = {}^{a}T_{b}\,{}^{b}T_{c}\,{}^{c}\vec{q}_{m} \tag{10}$$

となります。逆に Σa から Σc への変換は

$$\begin{pmatrix} {}^{c}x_{m} \\ {}^{c}y_{m} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^{b}\theta_{c} & -\sin {}^{b}\theta_{c} & {}^{b}x_{c} \\ \sin {}^{b}\theta_{c} & \cos {}^{b}\theta_{c} & {}^{b}y_{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos {}^{a}\theta_{b} & -\sin {}^{a}\theta_{b} & {}^{a}x_{b} \\ \sin {}^{a}\theta_{b} & \cos {}^{a}\theta_{b} & {}^{a}y_{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}^{a}x_{m} \\ {}^{a}y_{m} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} {}^{c}\vec{q}_{m} &= {}^{b}T_{c}^{-1}\,{}^{a}T_{b}^{-1}\,{}^{a}\vec{q}_{m} && (12) \\ &= {}^{c}T_{b}\,{}^{b}T_{a}\,{}^{a}\vec{q}_{m} && (13) \end{aligned}$$

となります。

各座標間の倍率調整もスケール変換行列を定義して使われることがあります。Σb から Σa へスケール変換のみをする場合の座標変換行列は以下の様になります。

$$
{}^{a}T_{b} = \begin{pmatrix} {}^{a}\lambda_{b} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{a}\lambda_{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}
$$

ここで ${}^{a}\lambda_{b}$ は倍率です。

以上のような逆変換や複合変換、スケール変換を多重化することにより、いくらでも複雑な表現が実現できるわけです。

以上