正規化相関

正規化相関法とは2つの多次元データの相関(類似度)をはかる統計的手法のひとつです。簡単に言えば、ある分布とそれとは別の分布の形状の違いを数値化したものと捉えることが出来ます。1次元なら曲線、2次元なら面、3次元なら体の類似度になります。4次元以上になるとかなり抽象化した情報の類似度が計算できます。正規化といっていることから判るようにコントラストに対する不変性を原理的に有していますし、予めバイアス分を除いたデータで計算する等の工夫をすることで、シンプルな割には非常に強力なアルゴリズムが構築できます。

画像処理への応用

予め登録したパターン（テンプレートと称す）をそのパターンを含む画像の中から抽出するのに使います。複数のマークを抽出して対象物の位置合わせに用いることや、抽出したパターンとテンプレートとの差分を取って欠陥検査を行うことが出来ます。複数のテンプレートを用いて文字読みとりに応用することも出来ます。前述のように大変強力な探索アルゴリズムを構築できますが、テンプレートに対して入力画像が回転してしまうような用途にはそのままの形では使えません（回転不変の情報に変換することによって使うことは可能です)。

アルゴリズム概要

図１－１に示したように(x_i, y_j)の位置の濃度を $f(x_i, y_j)$ とします。

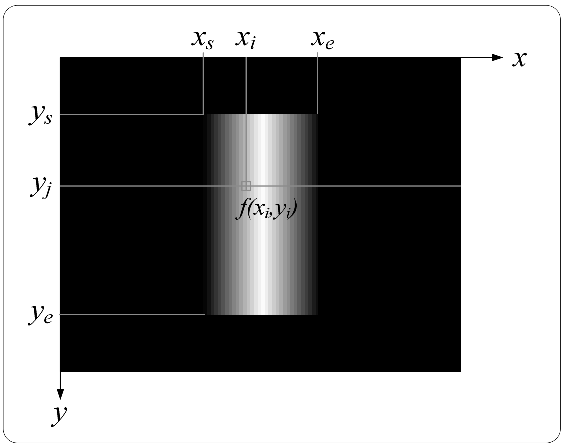

図１－１

探索したいテンプレートの濃度分布が上図のようになっているとき、$y = y_j$ の位置で濃度断面をとると、図１－２のようになります。

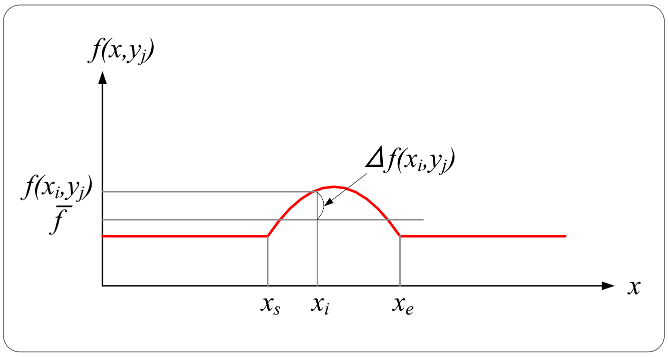

図１－２

この時、テンプレートの領域を対角の座標が(x_s, y_s)~(x_e, y_e)の矩形領域として考えています。

図１－２における $\bar{f}$ は

$$\bar{f} = \frac{1}{(x_e - x_s + 1)(y_e - y_s + 1)} \sum_{y_i = y_s}^{y_e} \sum_{x_i = x_s}^{x_e} f(x_i, y_j) \qquad (1-1)$$

とします。つまり、テンプレートの平均濃度です。$\Delta f(x_i, y_j)$は

$$\Delta f(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) - \bar{f} \qquad (1-2)$$

であり、(x_i, y_j)における平均濃度からの偏差濃度です。

この $\Delta f(x_i, y_j)$ を $x = x_s$, $y = y_s$ から $x = x_e$, $y = y_e$ まで一次元的に並べる事によって、テンプレートの稜線の形状として定義することとします。この形状をベクトルに見立て、$\vec{f}$ で表わす事にすれば（1－3）式のようになります。T は転置を表しています。

$$\vec{f} = \left(\Delta f(x_s, y_s) \quad \Delta f(x_s, y_{s+1}) \quad \Delta f(x_s, y_{s+2}) \quad \cdots \quad \Delta f(x_e, y_e)\right)^T \qquad (1-3)$$

一方、入力パターンの濃度分布が図１－３のようになっているとします。

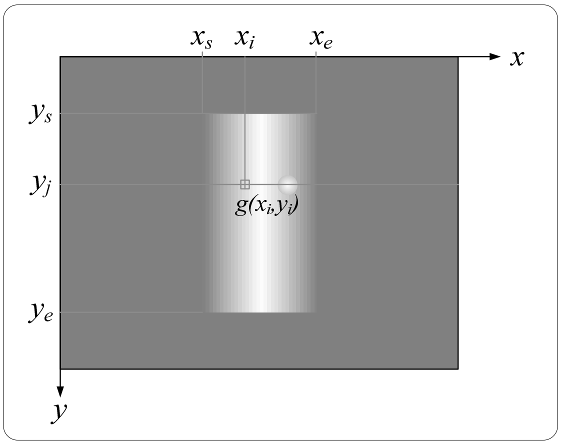

図１－３

このとき、$y = y_j$ の位置で濃度断面をとると図１－４のようになります。

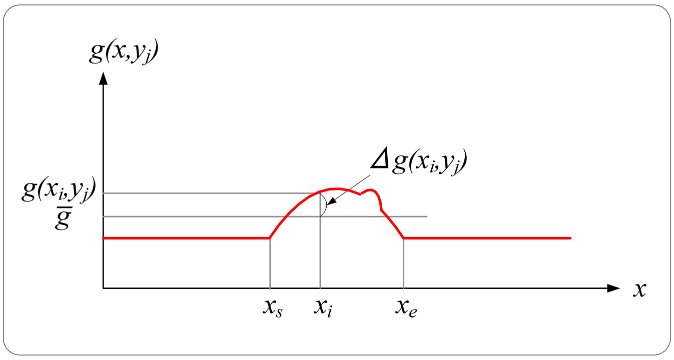

図１－４

入力パターンの領域は、対角の座標をとした $(x_s, y_s) \sim (x_e, y_e)$ の矩形領域でテンプレートの領域と同一です。また、濃度 $g(x_i, y_j)$ は (x_i, y_j) での入力パターンの濃度です。図１－４において、$\bar{g}$ は

$$\bar{g} = \frac{1}{(x_e - x_s + 1)(y_e - y_s + 1)} \sum_{y_i = y_s}^{y_e} \sum_{x_i = x_s}^{x_e} g(x_i, y_j) \qquad (1-4)$$

とします。つまり、入力パターンの平均濃度です。また、$\Delta g(x_i, y_j)$ は

$$\Delta g(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) - \bar{g} \qquad (1-5)$$

で、(x_i,y_j)における平均濃度からの偏差濃度です。テンプレートと同様に入力パターンの稜線の形状をベクトルに見立てて、$\vec{g}$ で表わす事にすれば（１－６）式のようになります。

$$\vec{g} = \left(\Delta g(x_s,y_s) \quad \Delta g(x_s,y_{s+1}) \quad \Delta g(x_s,y_{s+2}) \quad \cdots \quad \Delta g(x_e,y_e)\right)^T \qquad \text{———} \quad (1-6)$$

$\vec{f},\vec{g}$ とも、各々の平均濃度 $\bar{f},\bar{g}$ を基準とした稜線なので平均濃度分は除去されている事に注意してください。こうしたとき、$\vec{f},\vec{g}$ の類似度を考えます。$\vec{f},\vec{g}$ はベクトルで表わしていますので、２つのベクトルの類似度を考えればよいことになります。数学ではこれに相性の良い演算として内積があります。$\vec{f},\vec{g}$ は実際には $(x_e-x_s+1)(y_e-y_s+1)$次元のベクトルですが、これを極端に簡単化して２画素で構成されているパターンとして説明します。このとき、図１－５に示したように $\vec{f},\vec{g}$ は２次元ベクトルとなります。

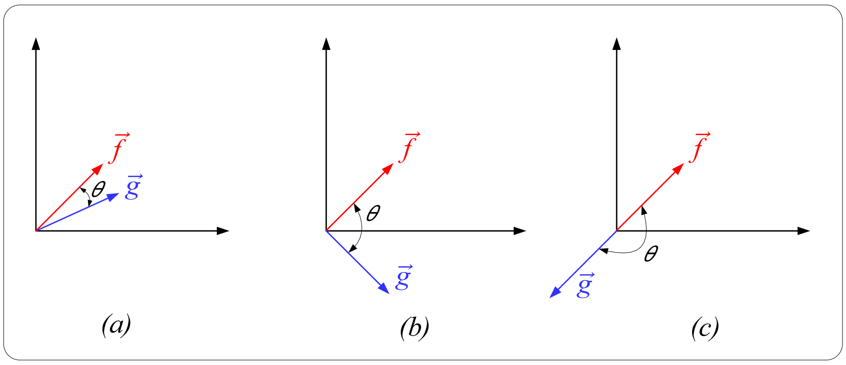

図１－５

（ａ）にテンプレートと入力パタンが似ているときの $\vec{f},\vec{g}$ のベクトルを示します。θが０に近くなります。（ｂ）にテンプレートと入力パタンが似ていないときの $\vec{f},\vec{g}$ のベクトルを示します。θは０からかなり離れます。（ｃ）に $\vec{f},\vec{g}$ が最も似ていない時のベクトルを示します。θは$\pi(rad)$になります。実はテンプレートの稜線の形状と、入力パタンの稜線の形状が平均濃度に対して対称となっている時にこうなります。ある意味で似ているともいえますが、画像処理の分野では一般的にこの状態は似ていないと判断しています。言うまでもないことですが、ネガポジ反転に対応した認識時にはこれを似ていると判断することになります。

以上の事実を踏まえて内戚の定義式を改めて見ることにします。

$$cos\theta = \frac{\vec{f}^T\vec{g}}{\left\|\vec{f}\right\| \cdot \left\|\vec{g}\right\|} \qquad \text{———————} \quad (1-7)$$

（１－７）式は内積の定義式そのものですが、θは $\vec{f},\vec{g}$ のなす角、つまり図１－５の（ａ）～（ｃ）におけるθと同じものです。$\vec{f}^T$ は $\vec{f}$ の転置、$\vec{f}^T\vec{g}$ は $\vec{f}$ と $\vec{g}$ の内積、$\left\|\vec{f}\right\|,\left\|\vec{g}\right\|$ は $\vec{f},\vec{g}$ の大きさ、つまり矢印の長さになります。($\|*\|$をノルムと称します)

先に述べた通り、似ている時はθは０に近く、似ていない時はθが大きくなるのですから、$cos\theta$は似ている時は１に近く、似ていない時は０に近くなるか、あるいは負値となります。この$cos\theta$を類似度として採用したものが

正規化相関です。相関係数とも言いますが同じものです。$\cos\theta$ ではあまり係数という感じがしませんので、以下のように一つの記号 r で表すこともあります。

$$r=\frac{\vec{f}^T\vec{g}}{\|\vec{f}\|\cdot\|\vec{g}\|} \qquad (1-8)$$

正規化という言葉は、*（1－8）*式の右辺において、内積を各々のノルムで割っているためです。*（1－8）*式の表現を若干変更した*（1－9）*式の方が正規化の概念を良く表現しているかもしれません。

$$r=\frac{\vec{f}^T}{\|\vec{f}\|}\cdot\frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \qquad (1-9)$$

*（1－9）*式を使うと、入力パターンのコントラストが強くなったり弱くなったりしても一定の値が得られますので、このことからも画像処理には好都合となります。なぜ、コントラストに関係なく一定の値が得られるかを簡単に説明します。図１－６に図１－５の*（a）*の状態から $\vec{g}$ のコントラストが強くなった時のベクトルを示します。

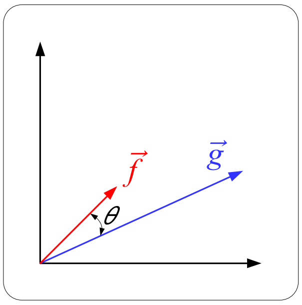

図１－６

図からの簡単な考察から、$\vec{g}$ の矢印が長くなるのみで θ には無関係である事が判ります。これを*（1－9）*式で見ると、分子の値に比例して分母の値も大きくなるので相殺されてしまうことになります。
以上で基本的な説明を終わりますが、実際にはテンプレートと入力パターンの $(x_s,y_s)\sim(x_e,y_e)$ は一致しませんので、画像の左上から右下に向かって領域を切り出しながら*（1－9）*式の計算を行い、r が最大値となる座標を当該テンプレートの探索結果として出力します。

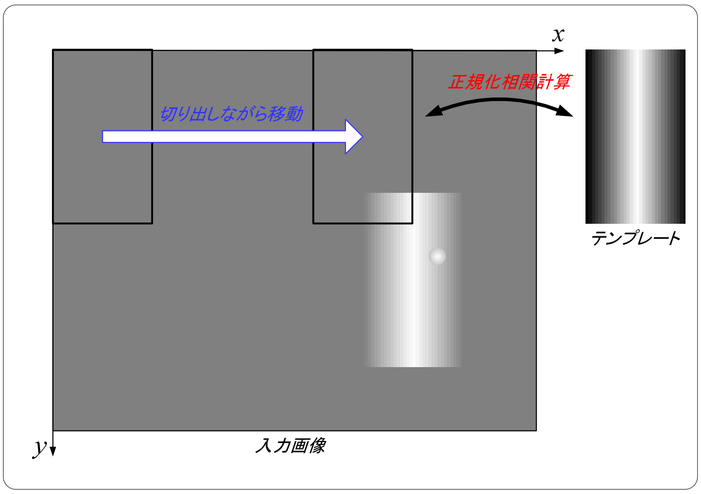

図１－７

この計算をまともに行いますと膨大な時間が掛かりますので、画像を圧縮するなどして高速化を図ることになります。正規化相関そのものは完成されているアルゴリズムなので、むしろこのあたりの高速化アルゴリズムが各社のエンジニアの腕の見せ所になってきます。

以　上

