画像処理に必要な座標変換

ロボットや画像処理の開発を進めていく際に、ある座標系上の座標を他の座標系上の座標に変換したいということは良くあることと思います。実際のケースでは座標系が5つも6つも出てきて、どんな行列を用いたらよいのか、そしてその順はどうなるのかといったような問題が発生します。ここでは、画像処理で使う座標変換(相似変換)に関して説明いたします。

１． 記号の定義

ベクトル表記に関して、表現上の制約から上部に矢印を付して表しています。また、(x_p, y_p) 座標をベクトル表現するのに以下の2つの方法を用いることにします。

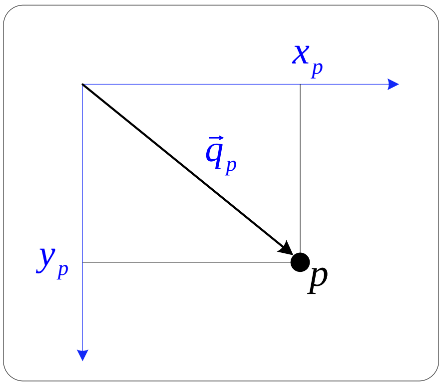

図１－１

$$\vec{q}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

$$\tilde{\vec{q}}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q}_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

$\tilde{\vec{q}}_p$ は $\vec{q}_p$ の同次座標表現で、これらはあくまでも表記が異なるだけで同値です。図での表現は $\vec{q}_p$ を使用しますが、計算では $\tilde{\vec{q}}_p$ を使います。さらに、座標系 Σa を考慮に入れて Σa 上での座標 $\vec{q}_p$ を、

$$^a\vec{q}_p = \begin{pmatrix} ^a x_p \\ ^a y_p \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

$$^a\tilde{\vec{q}}_p = \begin{pmatrix} ^a x_p \\ ^a y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^a\vec{q}_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1-4}$$

で表すことにします。つまり、$^a\vec{q}_p$ の左上の記号が座標系名を表します。

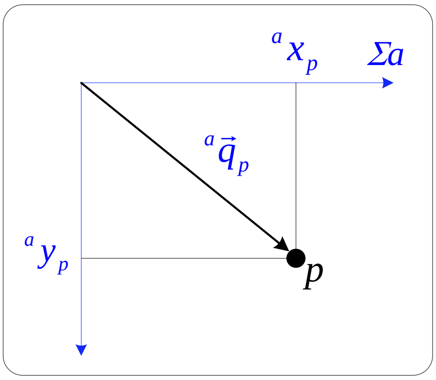

図１－２

２．各種の変換行列

一般的に Σb 上の座標 ${}^b\vec{q}_p$ から Σa 上の座標 ${}^a\vec{q}_p$ への変換は、同次座標を用いて、

$$ {}^a\tilde{\vec{q}}_p = {}^aT_b \cdot {}^b\tilde{\vec{q}}_p \qquad (2\text{-}1) $$

で表すことができます。ただし、${}^aT_b$ は Σb から Σa への座標変換行列です。種々の変換に関して、この ${}^aT_b$ の具体的な形を求めてみましょう。

（１）平行変換行列

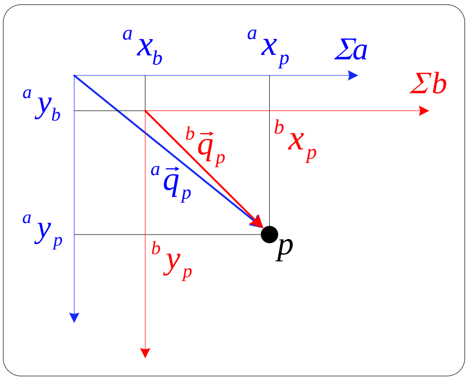

図２－１

上図から ${}^a x_p, {}^a y_p$ と ${}^b x_p, {}^b y_p$ の関係は、

$$ {}^a x_p = {}^b x_p + {}^a x_b \qquad (2\text{-}2) $$

$$ {}^a y_p = {}^b y_p + {}^a y_b \qquad (2\text{-}3) $$

となります。これらの式を変換行列で表すと、

$$ \begin{pmatrix} {}^a x_p \\ {}^a y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^a x_b \\ 0 & 1 & {}^a y_b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^b x_p \\ {}^b y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}4) $$

となります。このときの ${}^aT_b$ を平行変換行列と称します。

（２）回転変換行列

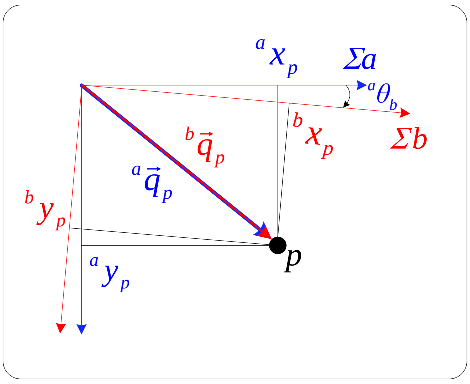

図２－２

上図から ${}^{a}x_p, {}^{a}y_p$ と ${}^{b}x_p, {}^{b}y_p$ の関係は、

$${}^{a}x_p = {}^{b}x_p \cos{}^{a}\theta_b - {}^{b}y_p \sin{}^{a}\theta_b \qquad (2\text{-}5)$$

$${}^{a}y_p = {}^{b}x_p \sin{}^{a}\theta_b + {}^{b}y_p \cos{}^{a}\theta_b \qquad (2\text{-}6)$$

となります。これらの式を変換行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} {}^{a}x_p \\ {}^{a}y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos{}^{a}\theta_b & -\sin{}^{a}\theta_b & 0 \\ \sin{}^{a}\theta_b & \cos{}^{a}\theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{b}x_p \\ {}^{b}y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}7)$$

となります。このときの ${}^{a}T_b$ を回転変換行列と称します。

（３）スケール変換行列

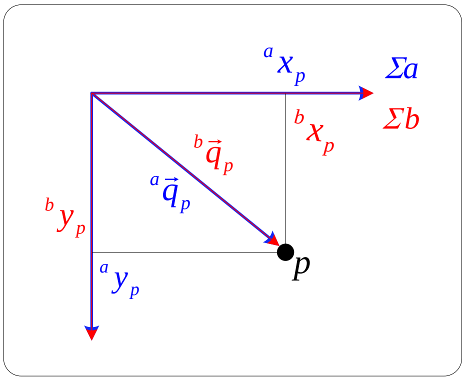

図２－３

${}^{a}x_p, {}^{b}x_p$ の単位長を ${}^{a}L_x, {}^{b}L_x$ とすると、

$${}^{a}x_p : {}^{b}x_p = {}^{a}L_x : {}^{b}L_x \qquad (2\text{-}8)$$

となり、さらに ${}^{a}y_p, {}^{b}y_p$ の単位長を ${}^{a}L_y, {}^{b}L_y$ とすると、

$${}^{a}y_p : {}^{b}y_p = {}^{a}L_y : {}^{b}L_y \qquad (2\text{-}9)$$

となります。これにより、

$$ {}^a x_p = \frac{{}^a L_x}{{}^b L_x} {}^b x_p \qquad (2\text{-}10) $$

$$ = {}^a \lambda_b \cdot {}^b x_p \qquad (2\text{-}11) $$

$$ {}^a y_p = \frac{{}^a L_y}{{}^b L_y} {}^b y_p \qquad (2\text{-}12) $$

$$ = {}^a \mu_b \cdot {}^b y_p \qquad (2\text{-}13) $$

となります。これらの式を変換行列で表すと、

$$ \begin{pmatrix} {}^a x_p \\ {}^a y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a \lambda_b & 0 & 0 \\ 0 & {}^a \mu_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^b x_p \\ {}^b y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}14) $$

となります。このときの ${}^aT_b$ をスケール変換行列と称します。

３． 実際の応用例

平行変換行列・回転変換行列・スケール変換行列を組み合わせることにより、種々の複雑な座標変換を生成することが可能になります。ここではその例をいくつか見ていきます。

（１） $xy\theta$ ステージの座標変換

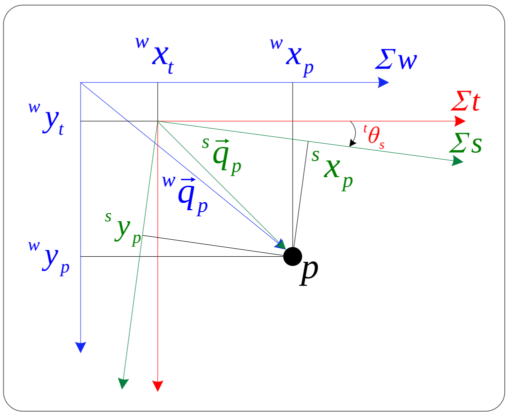

図３－１

${}^s\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$$ {}^w\tilde{\vec{q}}_p = {}^wT_t \cdot {}^tT_s \cdot {}^s\tilde{\vec{q}}_p \qquad (3\text{-}1) $$

で表されます。具体化すると、

$$\begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^w x_t \\ 0 & 1 & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos{}^t\theta_s & -\sin{}^t\theta_s & 0 \\ \sin{}^t\theta_s & \cos{}^t\theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos{}^t\theta_s & -\sin{}^t\theta_s & {}^w x_t \\ \sin{}^t\theta_s & \cos{}^t\theta_s & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

となります。逆に ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^s\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$$\begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos{}^t\theta_s & -\sin{}^t\theta_s & {}^w x_t \\ \sin{}^t\theta_s & \cos{}^t\theta_s & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

となります。

（２） θxy ステージの座標変換

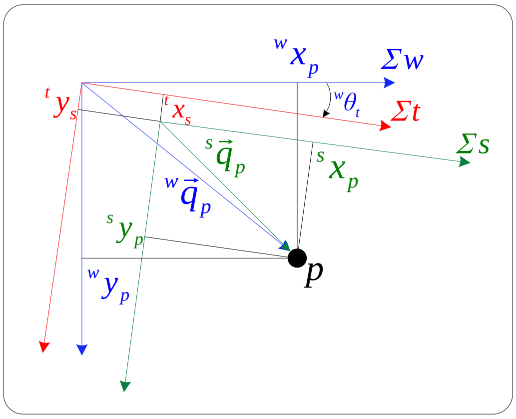

図３－２

${}^s\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$${}^w\tilde{\vec{q}}_p = {}^wT_t \cdot {}^tT_s \cdot {}^s\tilde{\vec{q}}_p \tag{3-5}$$

で表されます。具体化すると、

$$\begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos{}^w\theta_t & -\sin{}^w\theta_t & 0 \\ \sin{}^w\theta_t & \cos{}^w\theta_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t x_s \\ 0 & 1 & {}^t y_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-6}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos{}^w\theta_t & -\sin{}^w\theta_t & {}^t x_s \cos{}^w\theta_t - {}^t y_s \sin{}^w\theta_t \\ \sin{}^w\theta_t & \cos{}^w\theta_t & {}^t x_s \sin{}^w\theta_t + {}^t y_s \cos{}^w\theta_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

となります。逆に ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^s\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$$\begin{pmatrix} {}^s x_p \\ {}^s y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos{}^w\theta_t & -\sin{}^w\theta_t & {}^t x_s \cos{}^w\theta_t - {}^t y_s \sin{}^w\theta_t \\ \sin{}^w\theta_t & \cos{}^w\theta_t & {}^t x_s \sin{}^w\theta_t + {}^t y_s \cos{}^w\theta_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}8)$$

となります。

（3）画像処理でよく使われる座標変換

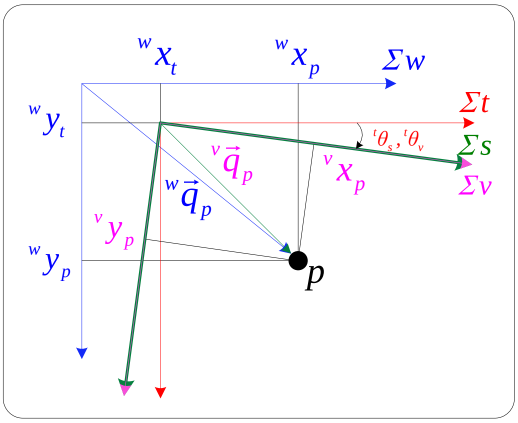

図3－3

${}^v\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$${}^w\tilde{\vec{q}}_p = {}^w T_t \cdot {}^t T_s \cdot {}^s T_v \cdot {}^v\tilde{\vec{q}}_p \qquad (3\text{-}9)$$

で表されます。具体化すると、

$$\begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^w x_t \\ 0 & 1 & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos{}^t\theta_s & -\sin{}^t\theta_s & 0 \\ \sin{}^t\theta_s & \cos{}^t\theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^s\lambda_v & 0 & 0 \\ 0 & {}^s\lambda_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^v x_p \\ {}^v y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}10)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^s\lambda_v \cos{}^t\theta_s & -{}^s\lambda_v \sin{}^t\theta_s & {}^w x_t \\ {}^s\lambda_v \sin{}^t\theta_s & {}^s\lambda_v \cos{}^t\theta_s & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^v x_p \\ {}^v y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}11)$$

となります。ここで x 軸と y 軸のスケールは等しいものとしています（画像処理では妥当な仮定）。逆に ${}^w\tilde{\vec{q}}_p$ から ${}^v\tilde{\vec{q}}_p$ への変換は、

$$\begin{pmatrix} {}^v x_p \\ {}^v y_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^s\lambda_v \cos{}^t\theta_s & -{}^s\lambda_v \sin{}^t\theta_s & {}^w x_t \\ {}^s\lambda_v \sin{}^t\theta_s & {}^s\lambda_v \cos{}^t\theta_s & {}^w y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {}^w x_p \\ {}^w y_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}12)$$

となります。ただし、

$${}^s x_p : {}^v x_p = {}^s\lambda_v : 1 \qquad (3\text{-}13)$$

$${}^s y_p : {}^v y_p = {}^s\lambda_v : 1 \qquad (3\text{-}14)$$

の比率とします（一般的に${}^{s}\lambda_{v}$の単位は「mm/pix」）。

以上

Appendix：行列の性質

行列 A,B を、

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{A-1}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{A-2}$$

とし、ベクトル $\vec{c}$ を

$$\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{A-3}$$

とします。このとき、

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{A-4}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \tag{A-5}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{A-6}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23}+a_{13}\cdot b_{33} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} & a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}+a_{23}\cdot b_{33} \\ a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}+a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32} & a_{31}\cdot b_{13}+a_{32}\cdot b_{23}+a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix} \tag{A-7}$$

$$A\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{A-8}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot c_1+a_{12}\cdot c_2+a_{13}\cdot c_3 \\ a_{21}\cdot c_1+a_{22}\cdot c_2+a_{23}\cdot c_3 \\ a_{31}\cdot c_1+a_{32}\cdot c_2+a_{33}\cdot c_3 \end{pmatrix} \tag{A-9}$$

となります。

一方、座標変換でよく出てくる行列 T は

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A\text{-}10)$$

の形をしており、ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A\text{-}11)$$

の形をしていますので、

$$T \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A\text{-}12)$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11} \cdot x + t_{12} \cdot y + t_{13} \\ t_{21} \cdot x + t_{22} \cdot y + t_{23} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A\text{-}13)$$

と計算されます。

以上